Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Soluzioni 2º esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
A.A. 2005–2006; 18–02–06

Gli studenti che sostengono il presente esame ed avranno la verbalizzazione di Analisi III, qualora debbano sostenere anche Complementi I, **non possono** portare il programma di Complementi I dello scorso anno. Per sapere quale programma portare si guardi la mia pagina web: www.mat.uniroma2.it/ perfetti e poi Ingegneria Elettronica 2005/2006.

Problema 1

La soluzione è $y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}F(p)$ dove $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}\big(e^{-pT} + \frac{e^{-2pT}}{p} + pa + b + 2a\big)$. Si intende $y(0)=a$, $y'(0)=b$ e $a_0>0$.

L'integrale è $y(t) = e^{-t+T}(t-T)H(t-T) + (1+e^{-t+2T}(-t+2T-1))H(t-2T) + e^{-t}(tb+ta-a)$

Problema 2 Sono tutte equazioni del tipo $\varphi(t) = t - \int_0^t e^{a(t-x)}\varphi(x)dx$ con $a=1,2,3,4$. In trasformata di Laplace diventa $\Phi(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{\Phi}{p-a}$ da cui $\Phi(p) = \frac{p-a}{p^2(p-a+1)}$ e quindi $\varphi(t) = \frac{-ta+1+ta^2-e^{t(a-1)}}{(a-1)^2}$

Problema 3 Sono tutti problemi del tipo $t^2 = \int_0^t e^{a(t-x)}\varphi(x)dx$ $a=1,2,3,4$. In trasformata di Laplace otteniamo $\frac{2}{p^3} = \frac{\Phi(p)}{p-a}$ da cui $\Phi(p) = \frac{p-a}{2p^3}$ e quindi $\varphi(t) = \frac{1}{4}(2t-at^2)$

Problema 4 Sono sistemi del tipo $\begin{cases} y''(t)+y'(t)=t & x(0)=a,\ y(0)=c \\ x'(t)+x(t)+y(t)=t & y'(0)=d \end{cases}$

Dette $\mathcal{L}(x)\stackrel{\text{def}}{=}A(p)$ e $\mathcal{L}(x)\stackrel{\text{def}}{=}B(p)$ si ha $pA-a+A+B=\frac{1}{p^2}$ e $p^2B-cB-d+pB-c=\frac{1}{p^2}$ e quindi $B(p) = \frac{p^3c+p^2c+dp^2+1}{p^3(p+1)}$ e $A(p) = -\frac{cp^2+cp^3+dp^2+1-p-p^2-ap^4-ap^3}{p^3(1+p)^2}$ da cui $y(t) = 1+d-t+\frac{1}{2}t^2+c-e^{-t}(d+1)$ e $x(t) = -4-\frac{1}{2}e^{-t}-c-d+3t+e^{-t}(4+tc+td+a+d+c)$

Problema 5

A. Detta $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ l'equazione diventa $a^2v_{xx}-p^2v+\omega=0$ con la condizione $v(0,p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. La soluzione generale è $v(x,p) = \alpha e^{px/a}+\beta e^{-px/a}+\frac{\omega}{p^2}$. La richiesta $|u(x,t)|\le Ae^{Bt}$ implica che $\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)| = 0$ da cui $\alpha=0$. Alla fine la soluzione è $v(x,p) = -\frac{\omega^3}{p^2(p^2+\omega^2)}e^{-px/a}+\frac{\omega}{p^2}$ e l'antitrasformata di Laplace è $u(x,t) = \big[\frac{\omega}{a}(x-ta)+\sin(t-\omega\frac{x}{a})\big]H(t-\frac{x}{a})+\omega t$

B. Procedendo come sopra si ottiene $p^2v(x,p)-p = a^2v_{xx}$ e la condizione iniziale $v(0,p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$. La soluzione è $v(x,p) = \frac{1}{p}+\frac{-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)}e^{-px/a}$ da cui $u(x,t) = 1+H(t-\frac{x}{a})(\cos(t-\frac{x}{a})-1)$

C. Procedendo come sopra si ottiene $p^2v(x,p)-1 = a^2v_{xx}$ e la condizione iniziale $v_x(0,p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. La soluzione è $v(x,p) = \frac{1}{p^2}-\frac{a\omega}{p(p^2+\omega^2)}e^{-px/a}$ da cui $u(x,t) = t+\frac{a}{\omega}H(t-\frac{x}{a})(\cos\omega(t-\frac{x}{a})-1)$

D. Procedendo come sopra si ottiene $p^2v(x,p)-1 = a^2v_{xx}$ e la condizione iniziale $v_x(0,p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$. La soluzione è $v(x,p) = \frac{1}{p^2}-\frac{a}{p^2+\omega^2}e^{-px/a}$ da cui $u(x,t) = t-\frac{a}{\omega}H(t-\frac{x}{a})\sin\omega(t-\frac{x}{a})$

Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Soluzioni 1º recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
A.A. 2005–2006; 18–02–06

Gli studenti che sostengono il presente esame ed avranno la verbalizzazione di Analisi III, qualora debbano sostenere anche Complementi I, **non possono** portare il programma di Complementi I dello scorso anno. Per sapere quale programma portare si guardi la mia pagina web: www.mat.uniroma2.it/ perfetti e poi Ingegneria Elettronica 2005/2006.

Problema 1 Sono tutti integrali della forma $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{x^4+a^4}$ con a opportuno.

R

γ_4

γ_2

γ_1 ε γ_3

$-R$ $-\varepsilon$ ε R

$\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{x^4+a^4}$ Consideriamo $\displaystyle\int_\Gamma dz\frac{\ln z}{z^4+a^4}$ dove Γ è il cammino rappresentato in figura per cui $\displaystyle\int_\Gamma dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} = \int_{\gamma_1} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} + \int_{\gamma_2} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} + \int_{\gamma_3} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} + \int_{\gamma_4} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4}$.

$\displaystyle\int_{\gamma_1} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4}$. $\gamma_1(t) = t$ con $-R\le t\le -\varepsilon$ e quindi $\displaystyle\int_{\gamma_1} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} = \int_{-R}^{-\varepsilon} dt\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}$. Ora $t=|t|e^{i\pi}$ per cui si ha $\displaystyle\int_{-R}^{-\varepsilon} dt\frac{\ln(|t|e^{i\pi})}{t^+a^4}$. Cambiamo variabile $\tau=-t$ per cui l'integrale diventa $\displaystyle\int_R^\varepsilon(-d\tau)\frac{\ln(\tau e^{i\pi})}{\tau^4+a^4} = \int_R^\varepsilon(-d\tau)\frac{\ln\tau}{\tau^4+a^4} + \int_R^\varepsilon(-d\tau)\frac{i\pi}{\tau^4+a^4} = \int_\varepsilon^R d\tau\frac{\ln\tau}{\tau^4+a^4} + \int_\varepsilon^R d\tau\frac{i\pi}{\tau^4+a^4}$ e nel limite $\varepsilon\to0$ e $R\to+\infty$ si ha $\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\frac{\ln\tau}{\tau^4+a^4} + \int_0^{+\infty} d\tau\frac{i\pi}{\tau^4+a^4}$. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_2} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_4} dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} = 0$ da cui

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_\Gamma dz\frac{\ln z}{z^4+a^4} = 2\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{x^4+a^4} + i\pi\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4} =$

$\displaystyle= 2\pi i\sum_k Resf(z_k)$ e quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{x^4+a^4} = -\frac12 i\pi\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4} + \pi i\sum_k Resf(z_k)$. Esplicitando si ottiene

$\displaystyle 2I = -i\frac{\pi^2}{4a^3}\sqrt2 - \frac{2\pi i}{4a^3}\big((e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac34\pi})\ln a + i\frac{\pi}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}(1+3e^{i\frac{\pi}{2}})\big)$. $\displaystyle I = \frac{\pi\sqrt2}{4a^3}\ln a - i\frac{\pi^2}{4a^3\sqrt2} + \frac{\pi^2}{16a^3}e^{i\frac{\pi}{4}}(1+3i) = \frac{\pi\sqrt2}{4a^3}\ln a - \frac{\pi^2}{8\sqrt2a^3}$

• Un altro modo di risolvere l'esercizio consiste nel prendere il cammino seguente e poi mandare $\varepsilon\to0$ e $R\to+\infty$.

Imz

z_0 $z_0=ae^{i\frac{\pi}{4}}$

Rez

ε R

Sull'asse verticale si parametrizza $\gamma(t)=-it$ $-R\le t\le-\varepsilon$ e quindi si ha $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{x^4+a^4} + \int_{-\infty}^0(-idt)\frac{\ln(-it)}{t^4+a^4} = 2\pi i Res\Big(\frac{\ln z}{z^4+a^4}\Big)\Big|_{z=z_0}$. Il secondo integrale è $\displaystyle\int_{+\infty}^0 idt\frac{\ln(te^{i\frac{\pi}{2}})}{t^4+a^4} = -i\int_0^{+\infty} dt\frac{\ln t}{t^4+a^4} - i\int_0^{+\infty} dti\frac{\pi}{2}\frac{\ln t}{t^4+a^4}$ e quindi alla fine si ha $\displaystyle I(1-i) + \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} dt\frac{1}{t^4+a^4} = 2\pi i Res\Big(\frac{\ln z}{z^4+a^4}\Big)\Big|_{z=z_0}$ ossia $\displaystyle I(1-i) + \frac{\pi^2}{4\sqrt2}\frac{1}{a^3} = \frac{2\pi i}{4a^4}(\ln a + i\frac{\pi}{4})(-ae^{i\frac{\pi}{4}})$. La parte con il logaritmo è data da $\displaystyle\frac{\pi}{2a^3}\ln ae^{i\frac{\pi}{4}}$; la parte senza logaritmo dà $\displaystyle-\frac{\pi^2}{4\sqrt2a^3} + \frac{\pi^2}{8a^3}e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi^2}{8\sqrt2a^3}(1-i)$. Riunendo si ha $\displaystyle I(1-i) = \frac{\pi}{2a^3}e^{i\frac{\pi}{4}}\ln a - \frac{\pi^2}{8\sqrt2a^3}(1-i)$ da cui $\displaystyle I = \frac{\pi\sqrt2}{4a^3}\ln a - \frac{\pi^2}{8\sqrt2a^3}$

otteniamo A: $-\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$, B: $\dfrac{\pi\ln 2}{16}-\dfrac{\pi^2}{32}$, C: $(\dfrac{\pi\sqrt{2}}{48}\ln 3-\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{48})3^{1/4}$, D: $\dfrac{\pi\sqrt{2}\ln 2}{32}-\dfrac{\pi^2}{128}\sqrt{2}$

Problema 2 Sono tutti integrali della forma $\alpha\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)}$ con $a>0$ e $b>0$. Si integra lungo il cammino la funzione $\dfrac{\ln z}{(z+a)^2(z+b)}$ (gli integrali lungo le curve γ_1 e γ_3 andavano specificati).

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t)=t+i\varepsilon,\quad 0\le t\le R\\
&\gamma_2(t)=Re^{it},\quad \varphi_o\le t\le 2\pi-\varphi_o,\ \varphi_o=\arctan\frac{\varepsilon}{R}\\
&\gamma_3(t)=-t-i\varepsilon,\quad -R\le t\le 0\\
&\gamma_4(t)=\varepsilon e^{-it},\quad -\frac{3}{2}\pi\le t\le-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ε φ_o

-1

R

e si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)}=-Res\frac{\ln z}{(z+a)^2(z+b)}\Big|_{z=-a}-\frac{\ln z}{(z+a)^2(z+b)}\Big|_{z=-b}$. L'integrale è $I=\dfrac{\alpha}{a(a-b)}+\alpha\dfrac{\ln a-\ln b}{(b-a)^2}$

A: $\alpha=1$, $a=1$, $b=2$ da cui $I=-1-\ln 2$, B: $\alpha=\frac14$, $a=\frac12$, $b=2$ $I=-\dfrac13-\dfrac29\ln 2$, C: $\alpha=1$, $a=1$, $b=4$ da cui $I=-\dfrac13-\dfrac29\ln 2$, D: $\alpha=\dfrac13$, $a=1$, $b=\dfrac23$ da cui $I=1-3(\ln 2-\ln 3)$

Problema 3 Si trattava di una funzione della forma $f(z)=z^ke^{\frac{a}{z}}+\dfrac{z^4}{(z+b)^5}$ con $k=4$ oppure $k=5$.

Prima domanda: integrale esteso al quadrato di centro $-b$, lato b. L'integrale è pari a $2\pi i Resf(z=-b)=2\pi i\dfrac{1}{4!}\lim\limits_{z\to-b}z^4=2\pi i$.

Seconda domanda: il quadrato comprende anche l'origine. L'integrale è $2\pi i(Resf(z=-b)+Resf(0))=2\pi i(1+\dfrac{a^5}{5!})$ se $k=4$ e $2\pi i(1+\dfrac{a^6}{6!})$ se $k=5$. Altrenativamente si poteva usare il punto all'infinito.